Ein Schnittpunkt-Satz

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.53-54

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ein Schnittpunkt-Satz

Von **Theodor Kaluza,** Hannover

Es seien f: $Z \to R$ und g: $Z \to R$ Abbildungen von $Z \neq \emptyset$ in $R \neq \emptyset$. Wir nennen das Paar (z, r) einen *Schnittpunkt* von f und g, wenn $f(z) = g(z) = r$ ist.

Im Falle $R = Z$ ist ein Schnittpunkt von f mit der speziellen Funktion $g(z) = z$ ein *Fixpunkt* von f.

Ist R durch $\leq$ total (vollständig) geordnet, und sind V, $H \subset R$, so bedeutet

$$V < H \text{ – lies: V vor H: } \forall\, v \in V \;\; \forall\, h \in H \;\; v < h.$$

Ist R zugleich ein topologischer Raum, so nennen wir R einen $U_<$-Raum, wenn für je zwei Punkte $r_1 < r_2$ in R Umgebungen $U(r_1)$, $U(r_2)$ existieren, für die

$$U(r_1) < U(r_2)$$

ist; – ein $U_<$-Raum ist also stets ein T_2-Raum, und wählt man auf einer total geordneten Menge die Ordnungs-Topologie (im klassischen Sinne) oder eine feinere Topologie, so wird sie zum $U_<$-Raum.

Satz: Es seien Z ein zusammenhängender und R ein $U_<$-Raum und f und g zwei stetige Abbildungen von Z in R:
wenn es Stellen $z_1, z_2 \in Z$ gibt, bei denen

$$f(z_1) < g(z_1) \text{ und } f(z_2) > g(z_2)$$

ist, dann haben f und g einen Schnittpunkt.

Beweis: Ist $f(z) < g(z)$, so seien U_f, U_g Umgebungen von $f(z)$ bzw. $g(z)$ in R, für die $U_f < U_g$ ist, und dann seien $U_f(z)$, $U_g(z)$ Umgebungen von z in Z, sodaß

$$f(U_f(z)) \subset U_f \text{ und } g(U_g(z)) \subset U_g$$

ist: dann gilt für $U(z) = U_f(z) \cap U_g(z)$

$$f(U(z)) < g(U(z));$$

entsprechend verfährt man, wenn $f(z') > g(z')$ ist und bekommt eine $U(z')$ von z' in Z, für die

$$f(U(z')) > g(U(z'))$$

ist;

man kann o. B. d. A. unter diesen Umgebungen $U(z)$ bzw. $U(z')$ *offene* Mengen in Z verstehen, die wir kürzer mit U bzw. U' bezeichnen wollen;
gäbe es *keinen* Schnittpunkt, so wäre $\{U\} \cup \{U'\}$ eine offene Überdeckung von Z, die sich aus zwei fremden, nicht-leeren Teilsystemen zusammensetzt:

$$\{U\} \text{ mit } f(U) < g(U) \text{ und } \{U'\} \text{ mit } f(U') > g(U');$$

da Z zusammenhängend ist, können $\{U\}$ und $\{U'\}$ nicht fremd sein: $\exists\ U_0 \in \{U\}$ und $U_0' \in \{U'\}$, sodaß $D = U_0 \cap U_0' \neq \emptyset$ ist; dann müßte aber

$$f(D) < g(D) \text{ und zugleich } f(D) > g(D)$$

sein, was unmöglich ist ■

Corollare:

(C 1) Für konstante Funktionen $g(z) = c$ und $f(z_1) < c < f(z_2)$ geht der Satz in einen verallgemeinerten *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen über.

(C 2) Für $Z = R = [0, 1]$ und $g(z) = z$ geht der Satz in den einfachsten Fall des BROUWERschen Fixpunktsatzes über.